Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jakub Eliáš

Grassmannovy a vlajkové variety

Matematický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Lukáš Krump, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

2013

Děkuji svému vedoucímu Mgr. L. Krumpovi Ph.D. za velkou trpělivost při pomoci se psaním práce.

Dále děkuji svým rodičům za podporu ve studiu.

Nakonec bych chtěl poděkovat doc. RNDr. Spurnému CSc. a doc. RNDr. Holickému CSc. za dohled při studiu matematické analýzy.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Grassmannovy a vlajkové variety

Autor: Jakub Eliáš

Katedra: Matematický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Lukáš Krump, Ph.D., Matematický ústav Univerzity Karlovy

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá popsáním Grassmannových a vlajkových variet jako hladkých variet a jejich vlastností. K tomu je odvozen pomocí teorie Lieových grup způsob, jak zavést hladký atlas na obecném kvocientu Lieovy grupy a její uzavřené podgrupy. Práce se skládá ze dvou částí. V první části shrnujeme základy potřebné teorie Lieových grup, zavedeme kvocient Lieovy grupy a její uzavřené podgrupy jako hladkou varietu a ukážeme, jak ho lze vyjádřit jako homogenní prostor. V druhé části zavedeme Grassmannovy variety a vlajkové variety (které rozdělíme na úplné a neúplné) a oba typy vyjádříme jako homogenní prostory.

Klíčová slova: Grassmannova varieta, vlajková varieta, izotropní grupa, homogenní prostor

Title: Grassmann and flag manifolds

Author: Jakub Eliáš

Department: Matematický ústav Univerzity Karlovy

Supervisor: Mgr. Lukáš Krump, Ph.D., Matematický ústav Univerzity Karlovy

Abstract: This bachelor thesis deals with describing Grassmann and flag manifolds as smooth manifolds with their properties. In order to do so we use Lie group theory to introduce a way to construct a smooth atlas on a general quotient of a Lie group and its closed Lie subgroup. The thesis consists of two parts. In the first part we summarize needed basics of Lie group theory, we introduce the quotient of a Lie group and its closed Lie subgroup and describe a means how to express it as a homogeneous space. In the second part we introduce the Grassmann manifolds and flag manifolds (which we break up to complete and partial ones) and express both types of them as homogeneous spaces.

Keywords: Grassmann manifold, flag manifold, homogeneous space, isotropy group

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Cílem této práce je popsat Grassmannovy a vlajkové variety, které zobecňují geometrický pojem projektivního prostoru. Ten může být na $\mathbb{R}^n$ geometricky interpretován jako množina všech přímek procházejících počátkem, tedy všech jedno-dimenzionálních lineárních podprostorů v $\mathbb{R}^n$. Grassmannova varieta je pak zobecněním tohoto konceptu pro více-dimenzionální podprostory obecného lineárního vektorového prostoru. Obecně je Grassmannova varieta $Gr(k, V)$ definována jako množina všech k-dimenzionálních podprostorů ve vektorovém prostoru V pro $k \in \mathbb{N}$. V této práci budeme ale pracovat pouze s Grassmannovými varietami na $\mathbb{R}^n$, které budeme značit $Gr(k, n)$.

Grassmannovy variety je možné zavést také pomocí vnější algebry $\bigwedge(V)^*$ na vektorovém prostoru V pomocí tzv. rozložitelných vektorů. Prvek $v \in \bigwedge^k(V)$ je rozložitelný, pokud existují $v_1, v_2, ..., v_k \in V$ tak, aby $v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_k = v$. Pro pevné k označíme $\mathcal{R}$ množinu všech nenulových rozložitelných vektorů v $\bigwedge(V)^k$ a zavedeme na ní ekvivalenci $\sim$ takto: pro $u, v \in \mathcal{R}$ platí $u \sim v$ právě tehdy, když existuje $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ tak, aby $u = \alpha v$. Potom $\mathcal{R}/\sim$ je bijektivní s $Gr(k, n)$, viz [KS]. Takto je velmi dobře vidět, že pro volbu $V = \mathbb{R}^{n+1}, k = 1$ ekvivalence $\sim$ splývá s ekvivalencí $\sim'$ v obvyklé definici projektivního prostoru $P(\mathbb{R}^n) := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim'$, kde pro $x, y \in (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ platí $x \sim' y$ právě když existuje $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$: $\lambda x = y$.

Dalším krokem v zobecnění projektivního prostoru jsou vlajkové variety. To jsou množiny ostře rostoucích (ve smyslu inkluze) posloupností podprostorů daného vektorového prostoru. Grassmannián je tak nejjednodušším příkladem vlajkové variety, která obsahuje pouze jeden vlastní podprostor.

V prvních dvou podkapitolách kapitoly Teorie Lieových grup nejprve podáme souhrn základních definic teorie Lieových grup, abychom mohli definovat hladkou varietu a několik zobrazení mezi hladkými varietami, Lieovu grupu a její algebru, uzavřenou podgrupu Lieovy grupy a exponenciální zobrazení. Protože nám k popsání našich variet budou stačit lineární Lieovy grupy, zavedeme exponenciálu pouze pro maticové grupy. Dále zformulujeme několik základních tvrzení o vlastnostech exponenciály a uzavřených podgrupách v Lieově grupě. Uvedeme také definice maticových Lieových grup a algeber, se kterými budeme pracovat.

V podkapitole Homogenní prostory definujeme pojmy akce grupy na množině a speciální případ homogenního prostoru, kdy Lieova grupa G působí na hladkou varietu M a každá orbita této akce tvoří celé M. Dále zavedeme izotropní podgrupu G_x vzhledem k x v M, která se skládá z prvků G, které fixují daný prvek a uvedeme definici kvocientu Lieovy grupy a její podgrupy. Až budeme mít připravené všechny definice a dokázaná všechna pomocná tvrzení, obecně zkonstruujeme hladký atlas na kvocientu G/H Lieovy grupy G a některé její uzavřené podgrupy H a tím ukážeme, že má strukturu hladké variety. Pro výběr kvocientu podle izotropní grupy nakonec ukážeme, že hladká varieta G/H je difeomorfní s M.

Obsahem třetí kapitoly je definice Grassmannovy variety, přímá konstrukce hladkého atlasu na ní a použití dokázaných tvrzení o homogenních prostorech. Ukážeme, že Grassmannián je homogenní prostor ortogonální grupy (případně unitární pro komplexní případ) a najdeme jeho izotropní grupu, abychom získali vyjádření Grassmannovy variety jako kvocientu ortogonální grupy a její izotropní grupy.

V poslední kapitole zavedeme úplné a neúplné vlajkové variety, ukážeme, že to jsou homogenní prostory a opět na ně aplikujeme dokázaná tvrzení, abychom ukázali, že to jsou hladké variety. Dostaneme několik způsobů, jak zapsat vlajkové variety pomocí kvocientů maticových grup.

Hlavními výsledky práce jsou konstrukce hladkého atlasu na Grassmannově varietě, konstrukce obecného hladkého atlasu na kvocientu Lieovu grupy a její izotropní grupy vzhledem k homogennímu prostoru a odvození kvocientů difeomorfních s Grassmannovými a vlajkovými varietami.

Celá tato práce je kompilací výsledků uvedených v [KS] [CL] [FH]. Oproti této literatuře byly navíc podrobně rozpracovány důkazy hlavních tvrzení na stranách 16 a 17.

Kapitola 2

Teorie Lieových grup

2.1 Základní definice

Pro začátek zavedeme obvyklé definice grupy, hladké variety a jejich kombinaci v podobě struktury Lieovy grupy. Také definujeme některé druhy zobrazení mezi hladkými varietami a uvedeme základní příklady maticových Lieových grup, se kterými budeme pracovat. Oproti běžné terminologii budeme rozlišovat (vnořené) Lieovy podgrupy a (vložené) uzavřené Lieovy podgupy. Tato kapitola je kompilací standardních definic převzatých z [KS].

Definice (grupa)

Nechť G je neprázdná množina, na které je definována asociativní binární operace $\cdot : G \times G \to G$, neutrální prvek $e \in G$ vzhledem k $\cdot$ a inverzní prvek g^{-1} v G ke každému $g \in G$ vzhledem k $\cdot$. Pak čtveřici $(G, ., e, ^{-1})$ nazýváme grupa G. Množinu G v rámci grupy G nazveme nosič grupy G.

Pozn: Symbol $\cdot$ značící grupovou operaci budeme uvádět pouze v případě, že by mohlo dojít k nedorozumění.

Definice (topologická grupa)

Nechť G je grupa a zároveň nosič G je topologický prostor (tedy je zadána topologie na množině G). Nechť navíc binární operace a přiřazení inverzního prvku v G jsou spojitá zobrazení. Pak G nazveme topologickou grupou.

Definice (homeomorfismus)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ je homeomorfismus, jestliže je spojitá bijekce, ke které existuje spojité inverzní zobrazení.

Definice (difeomorfismus)

Hladké zobrazení z otevřené podmnožiny v $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, které je prosté a ke kterému existuje hladké inverzní zobrazení, nazýváme difeomorfismus. Řekneme, že dvě otevřené množiny v $\mathbb{R}^n$ jsou difeomorfní, pokud mezi nimi existuje nějaký difeomorfismus.

Definice (mapa, hladká varieta, dimenze variety)

Nechť M je množina, pak n-dimenzionální mapa na M je dvojice (U, φ), kde $U \subset M$ a $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ je prosté zobrazení na nějakou otevřenou množinu v $\mathbb{R}^n$.

Jsou-li $(U, \varphi), (U'\varphi')$ dvě mapy na M, pak se zobrazení $\psi_{U,U'} : \varphi^{-1}(U \cap U') \to \varphi'^{-1}(U \cap U'), \psi_{U,U'} = \varphi^{-1} \circ \varphi'$ nazývá přechodová funkce mezi těmito mapami.

Řekneme, že dvě mapy $(U, \varphi), (U'\varphi')$ jsou kompatibilní, jestliže $\varphi(U \cap U')$ a $\varphi'(U \cap U')$ jsou otevřené množiny a přechodová funkce mezi nimi je difeomorfismus. Navíc pro případ $(U \cap U') = \emptyset$ považujeme mapy za kompatibilní.

Hladký atlas na M je množina map $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ na M takových, že každé dvě mapy atlasu jsou kompatibilní a $\cup_{i \in I} \varphi(U_i) = M$.

Je-li dán atlas na M, definujeme topologii na M takto: množina A v M je otevřená, pokud pro každou mapu (U, φ) z daného atlasu platí, že $\varphi(U) \cap A$ je otevřená podmnožina v $\mathbb{R}^n$.

Hladká varieta dimenze n je taková množina M, na které je zadán atlas n-dimenzionálních map takový, že M je Hausdorffův prostor a má spočetnou bázi otevřených množin.

Definice (hladké zobrazení pro hladké variety)

Nechť M, N jsou hladké variety a $f : M \to N$ je zobrazení. f nazýváme hladké, pokud pro každou mapu (U, ϕ) na M a každou mapu (V, ψ) na N platí, že $\psi \circ f \circ \phi : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \to \mathbb{R}^n$ je hladké.

Definice (difeomorfismus pro hladké variety)

Nechť M, N jsou hladké variety a $f : M \to N$ je zobrazení. Řekneme, že f je difeomorfismus (hladkých variet M a N), pokud f je hladká bijekce a inverzní zobrazení k f je hladké.

Definice (tečný prostor)

Nechť M je varieta, $m \in M, c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ hladké zobrazení, $\epsilon > 0, c(0) = m$. Řekneme, že lineární zobrazení $L : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ je tečný vektor k c v bodě m, pokud platí: $L(f) = (f \circ c)'(0)$ pro každou funkci f v $C^\infty(M)$. Potom nazýváme tečným prostorem $T_m M$ množinu všech takových tečných vektorů v bodě m ke všem hladkým zobrazením c, které splňující předchozí definici (pro varietu M). Označíme TM disjunktní sjednocení tečných prostorů k M přes všechny $m \in M$.

Definice (diferenciál hladké funkce)

Nechť M je varieta, $m \in M, T_m M$ je tečný prostor variety M v bodě m. Duální prostor k němu $T_m^* M$ potom nazýváme kotečný prostor k M v bodě m.

Nechť napřed $f \in C^\infty(M)$. Pak diferenciál $df(m)$ hladké funkce f v bodě m definujeme jako prvek kotečného prostoru k M v bodě m takto: $df(m)(v) := v(f)$, pro každé $L \in T_m M$. Zobrazení $df : M \to TM$, které funkci přiřazuje v bodě m variety M její diferenciál $df(m)$, nazýváme diferenciál funkce f.

Definice (diferenciál hladkého zobrazení)

Nechť M, N jsou variety, $m \in M, \varphi : M \to N$ je hladké zobrazení. Definejeme $d\varphi(m) : T_m M \to T_{\varphi(m)} N$ diferenciál hladkého zobrazení φ v bodě m předpisem $[d\varphi(m)(v)](f) := v(f \circ \varphi), v \in T_m M, f \in C^\infty(N)$.

Definice (vnoření)

Řekneme, že hladké zobrazení $f : M \to N$ mezi hladkými varietami M, N je vnoření, pokud je jeho diferenciál prostý (na tečném prostoru M v každém bodě).

Definice (vložení)

Vložení je vnoření $f : M \to N$, které je navíc prosté a splňuje: M a $f(M)$ jsou difeomorfní.

Pozn: Topologie vnořené variety $S \subset M$ do variety M se obecně nemusí shodovat s topologií jakožto topologickým podprostorem S na varietě M. Naopak vložená varieta musí nutně zachovávat topologii podprostoru.

Definice (submerze)

Submerze je hladé zobrazení mezi dvěma hladkými varietami, jehož diferenciál je na.

Pozn: Submerze je otevřené zobrazení (v tom smyslu, že zobrazuje otevřené množiny na otevřené množiny).

Definice (Lieova grupa)

Nechť G je topologická grupa a zároveň hladká varieta (konečné dimenze), jejíž grupové operace násobení a inverze jsou hladké. Pak G se nazývá Lieova grupa. Dimenze Lieovy grupy G odpovídá dimenzi G jako variety.

Nechť $H \subset G$. H je Lieova podgrupa, pokud $id : H \to G$ je vnoření H do G, které je zároveň grupový homomorfismus. H je navíc uzavřená Lieova podgrupa, pokud je id vložení.

Pozn: Lieova podgrupa je Lieova grupa.

Příklady: Označíme $M(n) := \mathbb{R}^{n^2}$, ztotožníme prvky $M(n)$ s maticemi $n \times n$ nad $\mathbb{R}^n$. Podobně $M(n, \mathbb{C}) := \mathbb{C}^{n^2}$

$GL(n) := \{A \in M(n), detA \neq 0\}$ Obecná lineární grupa

$SL(n) := \{A \in GL(n), detA = 1\}$ Speciální lineární grupa

$B(n) := \{A \in GL(n), A$ je horní trojúhelníková matice$\}$ Grupa horních trojúhelníkových matic

$O(n) := \{A \in GL(n), A^T A = E\}$ Ortogonální grupa

$SO(n) := \{A \in GL(n), A^T A = E, detA = 1\}$ Speciální ortogonální grupa

$GL(n, \mathbb{C}) := \{A \in M(n, \mathbb{C}), detA \neq 0\}$ Obecná (komplexní) lineární grupa

$U(n) := \{A \in GL(n, \mathbb{C}), AA^\star = E\}$ Unitární grupa

$SU(n) := \{A \in GL(n, \mathbb{C}), AA^\star = E, detA = 1\}$ Speciální unitární grupa

Symbol A^T znamená transponovaná reálná matice A, $A^\star$ znamená Hermitovsky transponovaná komplexní matice A.

Tvrzení: $GL(n), SL(n), O(n), SO(n), U(n), SU(n), B(n)$ jsou Lieovy grupy pro každé $n \in \mathbb{N}$

Důkaz: viz literatura [CL]

Tvrzení: Grupy $O(n), SO(n), U(n), SU(n)$ jsou kompaktní pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz: Všechny tyto grupy jsou podgrupy $GL(n)$, takže jsou z definice uzavřené. Stačí tedy dokázat omezenost pro $O(n), U(n)$, protože $SO(n)$ je podgrupa v $O(n)$ a $SU(n)$ je podgrupa v $U(n)$.

Řádky ortogonální matice $(a_{i,j})$ jsou ortonormální, tedy platí: $a_{1,k}^2 + a_{2,k}^2 + ... + a_{n,k}^2 = 1$ pro každé $k = 1, .., n$. Pak $|a_{i,k}| \leq 1$ a $O(n)$ je tedy omezená. Ze stejného důvodu je také omezená grupa $U(n)$.

Definice (souvislost)

Topologický prostor je souvislý, pokud neobsahuje žádné vlastní podmnožiny, které jsou v něm otevřené a zároveň uzavřené.

Pozn: V Lieově grupě je zobrazení translace podle libovolného prvku (např zleva: $L_a(x) := ax$) difeomorfismus.

2.2 Lieovy algebry a podgrupy

V této kapitole zavedeme Lieovu algebru příšlušnou k Lieově grupě a exponenciálu. Uvedeme příklady Lieových algeber příslušných k dříve definovaným maticovým grupám a ukážeme základní vlastnosti exponenciály. Nakonec zformulujeme některá tvrzení, která se nám budou později hodit.

Definice (Lieova algebra)

Vektorový prostor $\mathfrak{g}$ s bilineární, antisymetrickou operací Lieovy závorky $[,]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, která splňuje Jacobiho identitu $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]] = 0$ pro každé $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ nazýváme Lieova algebra.

Podprostor $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ je Lieova podalgebra $\mathfrak{g}$, pokud je uzavřený na Lieovu závorku $[,]$.

Definice (vektorové pole)

Zobrazení $X : M \to TM$ splňující $\pi \circ X = id$ (kde π je projekce, která zobrazuje prvky $T_m M$ na bod m) nazýváme vektorové pole na M.

Dále pro Lieovu grupu G definujeme $\mathcal{X}(G)$ prostor všech hladkých vektorových polí a $\mathcal{X}_{\mathcal{L}}(G)$ jeho podprostor zleva invariantních vektorových polí na G, tj. takových hladkých vektorových polí X na M, která pro každé $a, g \in G$ splňují: $X(L_a(g)) = d(L_a)(g)X(g)$.

Pozn: $\mathcal{X}_{\mathcal{L}}(G)$ je Lieova algebra s operací komutátoru vektorových polí. Značíme ji $L(G)$ a nazýváme Lieova algebra příslušná k Lieově grupě G, viz [FH].

Tvrzení: Nechť G je Lieova grupa a $L(G)$ její Lieova algebra. Pak $T_e G \cong \mathcal{X}_{\mathcal{L}}(G)$ ve smyslu vektorových prostorů.

Důkaz: Definujeme zobrazení $f : \mathcal{X}_L(G) \to L(G), f(X) := X(e) \forall X \in \mathcal{X}_{\mathcal{L}}(G)$. Pak dostaneme $X(a) = d(L_a)(e)X(e)$ pro každé $a \in G$. Důkaz, že f je bijekce, je uveden v [CL].

Definice (lineární Lieova grupa)

Řekneme, že Lieova grupa je lineární, pokud to je uzavřená Lieova podgrupa v $GL(n)$ (případně v $GL(n, \mathbb{C})$) pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ nazýváme lineární, pokud $\mathfrak{g} = L(G)$ pro nějakou lineární Lieovu grupu G, a pokud navíc operace na ní je komutátor matic.

Definice (polojednoduchá Lieova algebra)

Polojednoduché říkáme Lieovým algebrám, jejichž maximální abelovský ideál (z hlediska inkluze podalgeber) je nula.

Příklady: V této práci nás budou zajímat pouze Lieovy algebry maticových grup na reálných a komplexních číslech definovaných v minulé kapitole. Vypíšeme pouze jejich definice, podrobné odvození je v literatuře [FH].

Označíme $L(GL(n)) = \mathfrak{gl}(n) := M(n)$ ve smyslu Lieovy algebry $GL(n)$.

$L(SL(n)) = \mathfrak{sl}(n) := \{A \in \mathfrak{gl}(n), trA = 0\}$ a platí: $\mathfrak{gl}(n) = \mathfrak{sl}(n) \bigoplus \mathbb{R}$.

$L(B(n)) = \mathfrak{b}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n), A$ je horní trojúhelníková $\}$

$L(O(n)) = L(SO(n)) = \mathfrak{so}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n), A^T = -A\}$

$L(GL(n, \mathbb{C})) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) := M(n, \mathbb{C}))$.

$L(SL(n, \mathbb{C})) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) := \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}), trA = 0\}$.

$L(U(n)) = L(SU(n)) = \mathfrak{su}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}), A^\star = -A\}$

Všechny tyto Lieovy algebry jsou lineární, přičemž $\mathfrak{sl}, \mathfrak{so}$ a $\mathfrak{su}$ jsou navíc polojednoduché, viz [FH].

Tvrzení (Closed subgroup theorem): Nechť G je Lieova grupa, $H \subset G$ uzavřená množina v G a H je podgrupa v G. Pak H je uzavřená Lieova podgrupa v G.

Důkaz: viz literatura [CL] (Closed subgroup thorem).

Pozn: K Lieově algebře $\mathfrak{g}$ obecně neexistuje jednoznačně určená Lieova grupa G, aby platilo $L(G) = \mathfrak{g}$. Pro lineární Lieovy grupy ovšem platí, že je můžeme rekonstruovat z jejich Lieovy algebry pomocí exponenciálního zobrazení ve smyslu následujících dvou tvrzení.

Definice (maticová exponenciála)

Exponenciálu je možné definovat pro obecný prvek Lieovy algebry, ovšem pro účely této práce bude stačit definovat exponenciálu pouze pro matice. Nechť A je tedy libovolná čtvercová matice. Definujeme $exp(A) := E + A + \frac{A^2}{2!} + ...$

Pozn: Toto zobrazení je dobře definováno, snadno se dokáže, že nekonečná řada $exp(A)$ absolutně konverguje, viz [FH].

Tvrzení: G je lineární Lieova grupa, $\mathfrak{g} = L(G)$. Pak zobrazení $exp : \mathfrak{g} \to G$ je hladké, určuje vnořenou souvislou podgrupu $exp(\mathfrak{g})$ a existují U okolí 0 v $\mathfrak{g}$ ($= T_eG$) a V okolí e v G taková, že exp difeomorfně zobrazí U na V.

Důkaz: viz [CL]

Tvrzení: Nechť G je topologická grupa, U je otevřené okolí e. Pak existuje (tzv. symetrické) otevřené okolí $V \subset U$, že $\forall v \in V$ je $v^{-1} \in V$. Pokud je navíc G souvislá, pak U generuje G v tom smyslu, že každý prvek v G lze napsat jako součin konečného počtu prvků v U.

Důkaz: Nechť i je spojité zobrazení, které přiřazuje v grupě G inverzní prvek. Pak $i(U)$ je také otevřené okolí e a $V := i(U) \cap U$ je tedy otevřené okolí e, které splňuje zadanou podmínku.

Nyní nechť je navíc G souvislá. Definujeme posloupnost otevřených okolí e: $U^1 := U$, $U^{n+1} := UU^n$, kde $UU^n = \{uw, u \in U \text{ a } w \in U^n\}$. Tato množina je otevřená, protože $UU^n = \bigcup_{u \in U^n}(L_u(U))$ a translace je difeomorfismus. Množiny U^n jsou tedy z definice otevřená okolí e, splňující: $U^1 \subset U^2 \subset ....$ Pak $U^\infty := \cup_{i=1}^{\infty} U^i$ je otevřené okolí e. U^∞ je z definice uzavřené na grupovou operaci v G, tedy to je podgrupa v G. Rozkladové třídy $\{gU^\infty, g \in G\}$ jsou otevřené množiny a tvoří pokrytí G. Ale G je souvislá, tedy je tvořena pouze jednou rozkladovou třídou, tedy $\{gU^\infty, g \in G\} = G$.

Důsledek: Nechť G je souvislá lineární Lieova grupa, pak ke každému $g \in G$ existuje konečná posloupnost $X_1, X_2, ..., X_k$ v $L(G)$, že platí: $g = exp(X_1)exp(X_2)$ $...exp(X_k)$.

2.3 Homogenní prostory

V této kapitole zavedeme způsob, jak ztotožnit některé hladké variety s kvocientem Lieovy grupy a její izotropní podgrupy pomocí pojmu homogenního prostoru. Definujeme izotropní podgrupu homogenního prostoru a Borelovu podgrupu a zformulujeme několik tvrzení o jejich vztahu. Nakonec ukážeme obecný způsob, jak zkonstruovat hladký atlas na kvocientu Lieovy grupy a nějaké její uzavřené Lieovy podgrupy a ukážeme, že kvocient podle izotropní podgrupy je difeomorfní s homogenním prostorem.

Definice (normální Lieova podgrupa)

Řekneme, že uzavřená podgrupa H v G je normální Lieova podgrupa, pokud H je navíc normální podgrupa grupy G.

Definice (akce grupy, orbita)

Nechť G je grupa a M je hladká varieta. Řekneme, že hladké zobrazení $(\,,\,) : G \times M \to M$, definované jako $(g, x) := gx$, je akce grupy G na M, pokud splňuje dvě podmínky: $(e, x) = x$ pro jednotkový prvek $e \in G$ a každé $x \in M$; $(gh, x) = (g(h, x))$ pro každé $x \in M$ a $g, h \in G$.

Definujeme orbitu akce grupy G na M jako $O_x := \{gx, g \in G\}$

Definice (homogenní prostor)

Řekneme, že hladká varieta M je homogenní prostor Lieovy grupy G, pokud G má akci na M takovou, že $O_x = M$ pro každé $x \in M$. Grupu G potom také můžeme nazývat transformační grupou homogenního prostoru M.

Pozn: Ekvivalentní podmínkou, aby M byl homogenní prostor Lieovy grupy G je, že existuje takové $x \in M$ aby $O_x = M$. Původní definice pak plyne z toho, že orbity rozkládají množinu G na třídy ekvivalence.

Definice (izotropní grupa)

Nechť M je homogenní prostor Lieovy grupy G, $x_0 \in M$. Pak $G_{x_0} := \{g \in G, gx_0 = x_0\}$ nazýváme izotropní grupa (případně izotropní podgrupa) prostoru M vzhledem k prvku x_0.

Pozn: Je velmi jednoduché ověřit, že izotropní grupa G_{x_0} je podgrupa v G.

Pozn: Nezáleží na výběru prvku, podle kterého vezmeme izotropní grupu. Homogenní prostor má jednu orbitu, tedy můžeme zobrazit jednu izotropní grupu na druhou pomocí vnitřních automorfismů.

Tvrzení: G_{x_0} z minulé definice je uzavřená Lieova podgrupa v G.

Důkaz: G_{x_0} je podgrupa v G. Ukážeme, že G_{x_0} je uzavřená: zvolíme posloupnost g_n v G_{x_0} konvergující k nějakému bodu $x \in G$. Pak ze spojitosti akce platí: $gx_0 = \lim_{n\to\infty} g_n x_0 = \lim_{n\to\infty} x_0 = x_0$, tedy $g \in G_{x_0}$. Pak podle tvrzení (Closed subgroup theorem) je G_{x_0} uzavřená Lieova grupa v G.

Definice (Cartanova podalgebra, kořenový systém)

Nechť je $\mathfrak{g}$ polojednoduchá lineární Lieova algebra. Pak její maximální (z hlediska inkluze podalgeber) komutativní podalgebru skládající se z diagonalizovatelných matic $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ nazveme jako Cartanovu podalgebru $\mathfrak{g}$.

Řekneme, že lineární forma $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ je kořen, pokud je netriviální a označíme $V_\alpha := \{a \in \mathfrak{g}$, že $\forall H \in \mathfrak{h}$ platí $[H, a] = \alpha(H)$ a $\} \neq \emptyset$. Symbolem Δ označíme kořenový systém, tj.: množinu všech kořenů v $\mathfrak{g}$. Kořen $\alpha \in \Delta$ nazýváme kladný, pokud první nenulový koeficient a_i ve výrazu $\alpha(h) = \sum_{i=1}^n a_i h_i$ je kladný (kde $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$) a označíme Δ^+ množinu všech kladných kořenů v $\mathfrak{g}$.

Tvrzení: Nechť $\mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra a Δ kořenový systém v $\mathfrak{g}$. Potom platí $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta}(V_\alpha)$. Navíc $dimV_\alpha = 1$ pro všechna $\alpha \in \Delta$.

Důkaz: Rozklad přímo z definice, viz literatura [FH].

Definice (parabolická a Borelova podgrupa)

Nechť G je Lieova grupa, $\mathfrak{g} = L(G), \mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra a Δ^+ jsou kladné kořeny v $\mathfrak{g}$. Pak definujeme Borelovu podalgebru v $\mathfrak{g}$ jako $\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+}(V_\alpha)$. Pak říkáme Borelova podgrupa takové souvislé podgrupě B v G, která splňuje $L(B) = \mathfrak{b}$. Parabolické podgrupy nazýváme podgrupy P v G takové, že $B \subset P \subset G$.

Tvrzení: Borelova podgrupa je uzavřená Lieova podgrupa.

Důkaz: viz literatura [FH]

Tvrzení: Borelova podgrupa v $GL(n)$ je $B(n)$.

Důkaz: Víme, že $\mathfrak{gl}(n)$ je Lieova algebra od $GL(n)$. Napřed rozložíme $\mathfrak{gl}(n) = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}(n)$. Matice, které komutují se všemi ostatními v $\mathfrak{sl}(n)$, jsou právě všechny diagonální matice. Ty tedy tvoří Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ v $\mathfrak{sl}(n)$. Kořenový systém se skládá z prvků $(e_i - e_j), i \neq j$. Kladné kořeny jsou takové, pro které $i < j$. Tak dostaneme, že $\bigoplus_{\alpha \in \Delta^+}(V_\alpha)$ jsou právě striktně horní trojúhelníkové matice. Pak z definice Borelovy algebry je $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+}(V_\alpha)$ algebra všech horních trojúhelníkových matic se stopou 0. Přidáním $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}$ dostaneme Cartanovu algebru $\mathfrak{gl}(n)$ (protože prvky $\mathbb{R}$ komutují se vším). Tedy celkem je Borelova algebra $\mathfrak{gl}(n)$ tvořena horními trojúhelníkovými maticemi, a z toho plyne, že Borelova podgrupa v $GL(n)$ je $B(n)$.

Důsledek: Nechť G je lineární Lieova grupa. Pak její Borelova podgrupa je $G \cap B(n)$.

Definice (kvocient transformační grupy)

Nechť M je homogenní prostor Lieovy grupy G, H je nějaká uzavřená Lieova podgrupa v G. Označme $gH := \{gh, h \in H\}$ a $G/H := \{gH, g \in G\}$. Stejně jako u kvocientu grupy vezmeme reprezentanty rozkladových tříd ekvivalencí gH. Tuto množinu tříd ekvivalencí značíme G/H a nazýváme kvocient G a H. Označíme $M := G/H$. Nechť pak $x \in M$ odpovídá $gH \in G/H$. Akce G na $M = G/H$ je pak zadána takto: $(g', x) = (g', gH) = g'gH = (g', (g, H))$.

Tvrzení: Nechť G je Lieova grupa, H je uzavřená Lieova podgrupa. Pak G/H je hladká varieta.

Uvedeme podrobný důkaz tohoto tvrzení založený na náznaku důkazu v [CL].

Důkaz: Zvolíme podprostor $\mathfrak{m}$ v $L(G)$, který splňuje $L(G) = L(H) \oplus m$. Definujeme zobrazení $\varphi : L(H) \oplus \mathfrak{m} \to G$ jako $\varphi(A, B) := exp(A)exp(B)$. Zvolíme V okolí 0 v $L(H)$ a W okolí 0 v $\mathfrak{m}$ tak, aby φ difeomorfně zobrazilo $V \times W$ na nějaké okolí e v G a označíme toto okolí U. Dále vybereme kompaktní symetrické okolí $C \subset W$ takové, že platí $exp(C)exp(C) \subset U$. $\mathfrak{m}$ a $L(H)$ jsou vektorové prostory, tedy můžeme zvolit souřadnice $x_1, x_2, ..., x_k$ na V a $y_1, y_2, ..., y_q$ na C takové, že $-1 < x_i < 1, 1 \leq i \leq k$ a $-1 \leq y_j \leq 1, 1 \leq j \leq q$. Nyní máme takto zavedené souřadnice na $Q = \varphi(V \times C)$ pomocí $\varphi^{-1} : Q \to V \times C$. Rozdělíme Q jako disjunktní sjednocení $\varphi(V \times \{c\})$ pro $c \in C$. Zřejmě platí $\varphi(V \times \{0\}) = exp(V)exp(0) = exp(V) = H \cap U$. Nyní budeme chtít ukázat, že toto je správný způsob, jak na kvocientu zavést rozkladové třídy. Dokážeme proto následující pomocné tvrzení:

Lemma: $\forall g \in G$ existuje nejvýše jedno c $\in C$, aby $\{gH\} \cap$Q$\subset \varphi($V$\times\{c\})$.

Důkaz lemmatu: Předpokládejme, že $c, c' \in C$ jsou taková, že $exp(c)exp(V)$ a $exp(c')exp(V)$ leží obě ve stejné rozkladové třídě $gH = exp(c)H = exp(c')H$. Potom $exp(c)exp(-c') \in H \cap U = \varphi(V \times \{0\}) = exp(V)$ ($exp(-c')$ je inverzní k $exp(c')$). To znamená, že existuje $v \in V$, aby $exp(v) = exp(c)exp(-c')$. Z toho plyne $\varphi(\{v\} \times \{c'\}) = exp(v)exp(c') = exp(c) = exp(0)exp(c) = \varphi(\{v\} \times \{c'\})$. Protože φ je difeomorfismus a tedy bijekce, $c = c'$ a $v = 0$ je jediná možnost, která připadá v úvahu.

Pokračujeme v důkazu tvrzení: definujeme zobrazení $\phi : H \times int(C) \rightarrow int(Q)$, $\phi(h,c) := exp(c)h$. Pak je toto zobrazení difeomorfismus (je pouze zúžením grupové operace) a $\phi^{-1}(exp(c),h) = (h,c)$. Ještě definujeme projekci $\pi : H \times C \rightarrow C$ a můžeme začít konstruovat atlas. Pak kombinací těchto dvou zobrazení dostaneme $f : int(Q)H \rightarrow \mathfrak{m}, f(gh) = \pi \circ \phi^{-1}(gh) = x$, kde $\mathfrak{m} = \mathbb{R}^q$ a $x = (x_1, x_2, ..., x_q)$. Navíc platí, že f je submerze.

Nyní pokryjeme G otevřenými množinami ve tvaru $\{a \cdot int(Q)H\}$ přes všechna $a \in G$. Každé rozkladové třídě přiřadíme lokální souřadnice zobrazením $f_a = f \circ L_{a^{-1}}$. Na průniku $\{a \cdot int(Q)H\} \cap \{b \cdot int(Q)H\}$ je pak $\psi_{a,b} = L_{ab^{-1}}$ hladké zobrazení.

Ke každému prvku $a \in G$ umíme přiřadit otevřenou množinu a $U_a := a \cdot int(Q)H$ z pokrytí G. Definujeme standardní kvocientovou projekci $p : G \rightarrow G/H$, která prvku g přiřazuje rozkladovou třídu gH. Označíme $P : G/H \rightarrow G$ třídovou funkci, která zobrazuje rozkladovou třídu gH na libovolný prvek splňující $p(g) = gH$. Mohli bychom zvolit ke každé rozkladové třídě reprezentanta v G, abychom definovali P explicitně, ale tato definice pro naše záměry stačí, protože na výběru prvku nezáleží. Nyní můžeme konečně sestrojit atlas: $\{(U_a, F_a)\}_{a \in G}, F_a := f_a \circ P$.

Zbývá ukázat, že G/H vybavený tímto atlasem je lokálně homeomorfní $\mathbb{R}^q$. Pro pevné $a \in G$ je F_a z definice spojitá bijekce. Stačí ukázat, že F_a je navíc otevřené zobrazení. Ze spojitosti projekce p plyne, že pro $Z \subset U_a$ otevřenou je $P(Z)$ otevřená a f_a je otevřené zobrazení, protože to je submerze. F_a je tedy homeomorfismus U_a na $\mathbb{R}^q$.

Důsledek: G je Lieova grupa a H je její normální uzavřená Lieova podgrupa. Pak G/H je Lieova grupa.

Tvrzení: Nechť G je Lieova grupa, M je homogenní prostor G a G_{x_0} je izotropní podgrupa G vzhledem k M. Potom G/G_{x_0} a M jsou difeomorfní ve smyslu hladkých variet.

Důkaz: Vrátíme se zpět k akci G na M předefinované pro kvocient: $(g', gH) = g'gH$. Zvolíme libovolně $x_0 \in M$ a výběrem izotropní grupy $H = G_{x_0}$ dostaneme, že podle minulého tvrzení je G/G_{x_0} hladká varieta. Definujeme zobrazení $T : G/H \rightarrow M$ jako $T(gH) := gx_0$. To, že je zobrazení dobře definováno, plyne z toho, že pro $g, g' \in G$ platí $gH = g'H$ právě tehdy, když $g'g^{-1} \in H$. To znamená, že $g'g^{-1}x_0 = x_0$ a tedy $g'x_0 = gx_0$ nastane právě pro $gH = g'H$. T je tedy navíc bijekce a je spojité, protože se pak dá napsat pomocí třídové funkce P z důkazu minulého tvrzení jako $T(gH) = T'(P(gH)), T'(g) = gx_0$ a P, T' jsou spojitá.

Předefinujeme translaci pro kvocient podobným způsobem jako akci: pro $a \in G$ definujeme $L_a(gH) = agH$. Takto máme tedy translaci definovanou na G i G/H. Z definice Lieovy grupy G je L_a na G difeomorfismus, stejně tak $L_{a^{-1}}$ je difeomorfismus na G/H. Pak můžeme zobrazení T napsat jako $T(aH) = L_a \circ T \circ L_{a^{-1}}(aH)$ pro každé $a \in G$. Díky tomuto triku dostaneme první podmínku, a to, že zobrazení T je hladké na okolí eH právě tehdy když je všude hladké. Stejný trik použijeme pro diferenciál, abychom dostali druhou podmínku: $dT(aH) = dL_a(x_0) \circ dT(eH) \circ dL_{a^{-1}}(aH)$ je izomorfismus $T_aH(G/H)$ s $T_{ax_0}(M)$ právě tehdy, když $dT(eH)$ je izomorfismus $T_eH(G/H)$ s $T_{x_0}(M)$ (pokud považujeme předchozí podmínku spojitosti za splněnou). Ověříme-li tedy, že obě podmínky jsou pravdivé, pak podle [CL] (Inverse function theorem) bude T difeomorfismus, tedy tvrzení bude dokázáno.

První podmínka je splněna snadno: restrikce T na $int(C)$ je dána jako restrikce $T' \circ P$ na $int(C)$. T' je hladké, protože takto chápané je restrikcí grupové operace a p je difeomorfismus, který zobrazuje $int(C)$ na otevřenou množinu U_e. Můžeme tedy ověřovat druhou podmínku. Opět použijeme vlastností projekce, tedy abychom ukázali, že $dT(eH)$ je izomorfismus, ukážeme, že $dT'(e)$ je izomorfismus vektorových prostorů (už víme, že p je difeomorfismus) $T_{x_0}(M)$ a $T_e(exp(int(C))) = \mathfrak{m}$. Vybereme $v \in T_e(exp(int(C)))$ a s křivku takovou, že $s(t) = exp(tv)x_0$. Pak platí $dT'(e)(v) = s'(0)$. Stačí ukázat, že $dT'(e)$ je prosté, tedy že $s'(0) = 0$ implikuje $v = 0$. Nechť tedy platí $s'(0) = 0$ a označíme $a := exp(t_0 v)$ pro nějaké pevně zvolené t_0. Pak $L_a(s(t)) = exp(t_0 v)exp(tv)x_0 = s(t_0+t)$. Potom $dL_a(e)(s'(0)) = s'(t_0)$. Protože $s'(0) = 0$, platí $0 = s'(t_0)$. Vzhledem k tomu, že t_0 jsme zvolili libovolně, platí $s'(t) = 0$ pro každé $t \in \mathbb{R}$. Protože z definice platí $s'(t) = exp(tv)vx_0 = 0$ všude, musí platit $v = 0$.

Kapitola 3

Grassmannovy variety

3.1 Definice a vlastnosti

Teď, když máme připravená všechna potřebná tvrzení, můžeme konečně definovat Grassmannovu varietu a ukázat pár jejích základních vlastností. Uvedeme obecnou definici na vektorovém prostoru, ale v textu budeme pracovat pouze s Grassmanniánem na reálných číslech a budeme přidávat poznámky, jak upravit důkazy tvrzení, aby fungovaly v komplexních číslech.

Definice(projektivní prostor)

Projektivní prostor definujeme jako množinu: $P(\mathbb{R}^n) := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, kde pro $x, y \in (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ je definovaná relace $x \sim y$, když existuje $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$: $\lambda x = y$.

Definice(Grassmannova varieta)

Nechť n, k jsou přirozená čísla. Pak $Gr(k, n)$ je množina všech k dimenzionálních vektorových podprostorů v $\mathbb{R}^n$. Tuto množinu nazýváme Grassmannova varieta nebo Grassmannián.

Grassmannovu varietu můžeme také definovat na obecném lineárním vektorovém prostoru V. Pak pro přirozené k značíme $Gr(k, V)$ množinu všech k-dimenzionálních vektorových podprostorů obsažených ve V. Nechť n je přirozené. Pro $V = \mathbb{C}^n$ získáme komplexní Grassmannovu varietu. Označením $V = \mathbb{R}^n$ dostaneme $Gr(k, \mathbb{R}^n) = Gr(k, n)$, tedy původní definici.

Pozn: V tomto textu se omezíme výhradně na práci s reálnou a komplexní Grassmannovou varietou. Prvky $Gr(k, n)$ jako vektorové prostory budeme reprezentovat jako $k \times n$ matice reálných čísel (vzhledem k předem zvolené bázi $\mathbb{R}^n$), jejichž řádky generují daný k-dimenzionální podprostor.

Pozn: Definice funguje pro libovolná n, k přirozená čísla, pro k větší než n je $Gr(k, n)$ prázdná množina. Můžeme rozšířit definici tak, že povolíme k z přirozených čísel s přidanou nulou. $Gr(0, n)$ definujeme jako $\mathbb{R}^n$ (dodefinujeme

$Gr(0,V) = V$). To se nám bude později hodit při dokazování vlastností Grassmanniánu.

Pozn: Pro $k = 1$ je $Gr(1, n+1)$ přesně podle definice projektivní prostor na $\mathbb{R}^n$. Grassmannova varieta je tedy zobecněním pojmu projektivního prostoru.

Tvrzení: $Gr(k,n)$ a $Gr(n-k,n)$ jsou bijektivní.

Důkaz: Ověříme, že zobrazení o přiřazující množině její ortogonální doplněk v $\mathbb{R}^n$ je bijekce mezi $Gr(k,n)$ s $Gr(n-k,n)$. Nechť $A \in Gr(n,k)$. Pak $o(A) = A^\perp$. Dimenze A je k, tedy dimenze $A^\perp$ je $n-k$. Z toho plyne, že $o(A) \in Gr(n-k,n)$, tedy o je dobře definováno. Zobrazení o je pak prosté, protože dvě množiny mají stejný ortogonální doplněk právě tehdy, když jsou stejné. Dále je na, protože $o(o(A)) = A$.

Pozn: obecněji platí, že $Gr(k,V)$ a $Gr(n-k,V^*)$ jsou bijektivní.

Příklady: v dimenzi $n = 1$ dostaneme pouze $Gr(0,1) \simeq Gr(1,1) = \mathbb{R}$. Pro $n = 2$ a $n = 3$ máme navíc projektivní prostory $Gr(1,2) = P(\mathbb{R}^2), Gr(2,3) \simeq Gr(1,3) = P(\mathbb{R}^3)$ (což odpovídá geometrickému faktu, že rovinu v $\mathbb{R}^3$ lze až na orientaci popsat normálou). Teprve pro $n = 4$ dostaneme (nejjednodušší) Grassmannián $Gr(2,4)$, který není izomorfní žádnému projektivnímu prostoru.

3.2 Atlas

Abychom ukázali, že Grassmannián je hladká varieta, sestrojíme jeho atlas. Později ukážeme konstrukci izomorfní Grassmanniánu, ze které budou tyto vlastnosti vidět ihned, a navíc ukážeme, že Grassmannián je kompaktní.

Tvrzení: $Gr(k,n)$ je hladká varieta dimenze $n(n-k)$.

Důkaz: Máme zadána přirozená čísla n, k. Pro každou k-prvkovou podmnožinu $K \subset \{1,2,..,n\}$ definujeme $V_K := \{T \in Gr(k,n), x \in T \to \exists i \in : x_i \neq 0\}$. Nyní pevně zvolíme množinu $K = \{i_1 < i_2 < ... < i_k\}$ a zvolíme $l \in 1, 2, ..., k$. Pro každé $T \in V_K$ existuje $n-k$ jednoznačně určených (reálných) čísel $x^l_1, ..., x^l_{n-k}$, aby platilo, že vektor x zkonstruovaný takto:

na indexu j je :
- 0 pro $j \in k$ a zároveň $j \neq l$
- 1 pro $j = l$
- x^l_j jinak,

je obsažený v T.

Tato čísla můžeme spočítat z algebraické soustavy $n-k$ rovnic pro k dimenzionální lineární podprostor dosazením vektoru x do soustavy: dostaneme soustavu $n-k$ rovnic o $n-k$ neznámých, která má právě jedno řešení. Tento výpočet provedeme pro každé $l \in \{1, 2, ..., k\}$. Nyní můžeme definovat

$$f_K(T) := (x_1^1, ..., x_{n-k}^1, x_1^2, ..., x_{n-k}^2, ..., x_1^k, ..., x_{n-k}^k).$$

Dostaneme takto, že dimenze $Gr(k, n)$ je $k(n-k)$.

Zbývá zkonstruovat přechodové funkce mezi mapami a ukázat, že to jsou difeomorfismy. Přechodová funkce z $V_{K'}$ do V_K je definována jako

$$\psi_{K',K}(x_1^1, ..., x_{n-k}^1, ..., x_{n-k}^2, ..., x_1^k, ..., x_{n-k}^k) :=$$

$$f_K(f_{K'}^{-1}(x_1^1, ..., x_{n-k}^1, ..., x_{n-k}^2, ..., x_1^k, ..., x_{n-k}^k))$$

na $V_K \cap V_{K'}$. Z hlediska pohledu na prvky $Gr(k, n)$ jako na $k \times n$ matice vlastně přechodová funkce napřed sestaví ze zadaných $k(n-k)$ souřadnic příslušných ke K' matici $A_{K'}$, a potom ji transformuje na matici A_K, ze které vrátí souřadnice příslušné K. Protože obě matice reprezentují stejný prvek, musí existovat $X \in GL(n)$, že $A_K = XA_{K'}$. Navíc toto zobrazení, které k $A_{K'}$ přiřadí $A_K = XA_{K'}$ je jistě difeomorfismus a tedy i přechodová funkce je difeomorfismus.

Takto mohou vypadat dvě matice reprezentující stejný prvek Grassmanniánu:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|cccc}
1 & & & & & & & * & . & . & * \\
 & . & & & & & & . & & & . \\
 & & . & & & & & . & & & . \\
 & & & . & & & & . & & & . \\
 & & & & . & & & . & & & . \\
 & & & & & . & & . & & & . \\
 & & & & & & 1 & * & . & . & *
\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|ccc}
1 & & & * & & & & & * & . & * \\
 & . & & * & & & & & * & & * \\
 & & 1 & * & & & & & * & & * \\
 & & & * & 1 & & & & * & & * \\
 & & & * & & . & & & * & & * \\
 & & & * & & & . & & * & & * \\
 & & & * & & & & 1 & * & . & *
\end{array}\right)$$

Pozn: Při konstrukci atlasu pro $Gr(k, \mathbb{C})$ postupujeme zcela analogicky.

3.3 Kvocient podle izotropní grupy

Nyní budeme chtít použít dokázaná tvrzení z kapitoly Homogenní prostor. Nejprve ukážeme, že $Gr(k,n)$ tvoří homogenní prostor ortogonální grupy $O(n)$. Potom najdeme parabolickou podgrupu akce zadané homogenním prostorem. Tato grupa není obecně normální, ale faktorizací ortogonální grupy získáme hladkou varietu izomorfní s Grassmanniánem. Na konci kapitoly navíc ukážeme další konstrukce pro komplexní a orientovaný Grassmannián.

Tvrzení: $Gr(k,n)$ je homogenní prostor grupy $O(n)$.

Důkaz: Nechť $A, B \in Gr(k,n)$. Stačí ukázat, že $\exists X \in O(n)$, aby platilo: $(X, A) = XA = B$. To je ekvivalentní skládání automorfismů $X \circ A = B$. Víme, že prvky ortogonální grupy jsou invertibilní a tedy $X = B \circ A^{-1}$.

Tvrzení: Izotropní grupa libovolného prvku $Gr(k,n)$ jako homogenního prostoru z minulého tvrzení je $O(k) \times O(n-k)$

Důkaz: Protože nezáleží na volbě prvku x_0, zvolíme si prvek odpovídající podprostoru generovanému kanonickou bází v $\mathbb{R}^k$. Ortogonální grupa dimenze k odpovídá grupě automorfismů, které zachovávají standardní skalární součin na $\mathbb{R}^k$. Zároveň z definice vyplývá, že tyto automorfismy zachovají vlastnost podprostorů procházet počátkem $\mathbb{R}^k$. Naše kanonická báze je zároveň ortonormální báze v $\mathbb{R}^k$. Jejím ortogonálním doplňkem v $\mathbb{R}^{n-k}$ je přesně kanonická báze $\mathbb{R}^{n-k}$ a platí $\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n$. Nyní hledáme maximální podgrupu H v $O(n)$, která zachová skalární součin na těchto podprostorech. To je přesně podgrupa $O(k) \times O(n-k)$.

Následující obrázek znázorňuje, jak je podgrupa $O(k) \times O(n-k)$ vnořena do $O(n)$:

$$\left(\begin{array}{c|c} O(k) & \\ \hline & O(n-k) \end{array}\right)$$

Důsledek: $Gr(k,n)$ a $O(n)/(O(k) \times O(n-k))$ jsou difeomorfní hladké variety. Z toho (a z tvrzení v druhé kapitole o vlastnostech ortogonální grupy) snadno vyplývá, že Grassmannián je kompaktní a jeho dimenze je $k(n-k)$ podle následujícího výpočtu:

$$dimGr(k,n) = dimO(n)/(O(k) \times O(n-k)) = (\frac{1}{2}n(n-1)) - (\frac{1}{2}k(k-1)$$

$$-\frac{1}{2}(n-k)(n-k-1)) = \frac{1}{2}(n^2 - n + k^2 - k - n^2 - k^2 + n - k + 2kn) = k(n-k)$$

Pozn: Volbou unitární grupy místo ortogonální dostaneme difeomorfismus mezi $Gr(k, \mathbb{C}^n)$ a $U(n)/(U(k) \times U(n-k))$. Speciální ortogonální grupa nám dává difeomorfismus $SO(n)/(SO(k) \times SO(n-k))$ a $Gr_o(k, n)$, tzv. orientovaného Grassmanniánu. Kombinací obou předchozích úvah je difeomorfismus pro speciální unitární grupu a komplexní orientovaný Grassmannián.

Kapitola 4

Vlajkové variety

4.1 Definice a vlastnosti

Definice (vlajka, vlajková varieta, úplná a neúplná vlajková varieta)

Vlajka typu $(d_1, d_2, ..., d_k)$ ve vektorovém prostoru V dimenze n je ostře rostoucí posloupnost lineárních podprostorů $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_k = V$ pro kterou platí $0 = d_0 < d_1 < ... < d_k = n$, d_i je dimenze V_i. Vlajkám, které splňují $d_i = i$ pro $i = 1, 2, ..., k$ říkáme úplné vlajky, ostatním říkáme neúplné.

Jako vlajkovou varietu $\mathcal{F}_{d_1,d_2,...,d_k}(n)$ označíme množinu všech vlajek typu $(d_1, d_2, ..., d_k)$ ve vektorovém prostoru $V = \mathbb{R}^n$. Navíc si označíme úplnou vlajkovou varietu $\mathcal{CF}(n)$ množinu všech úplných vlajek v $\mathbb{R}^n$.

Pozn: Vlajky budeme reprezentovat jako matice (vzhledem k předem zvolené bázi) tvořené po řádcích odspodu vektory $v_1, v_2, ..., v_k$ takovými, že $v_1, ..., v_i$ generují V_i. Pak zvolíme bázi takovou, že tato matice je horní trojúhelníková pro úplné vlajky a odstupňovaná horní pro neúplné vlajky.

Pozn: každou neúplnou vlajku lze (ne jednoznačně) doplnit vhodnými podprostory na nějakou úplnou vlajku. Analogicky lze naopak ubíráním podprostorů z úplné vlajky dostat nějakou neúplnou vlajku.

Pozn: Grassmannián $Gr(k, n)$ je jako speciální případ $\mathcal{F}_{k,n}$.

4.2 Úplné

Tvrzení: $\mathcal{CF}(n)$ je homogenní prostor $GL(n)$.

Důkaz: Budeme chtít ukázat, že pro libovolné $A, B \in \mathcal{CF}(n)$ existuje $X \in GL(n)$, aby platilo: $XA = B$. Vzhledem k tomu, že $A, B \in B(n)$ (podle poznámky v předchozí kapitole), jsou také invertibilní, existuje A^{-1}. Pak $X := BA^{-1} \in GL(n)$ splňuje $XA = B$.

Tvrzení: Izotropní grupa úplné vlajkové variety $\mathcal{CF}(n)$ je přesně grupa horních trojúhelníkových matic $B(n)$.

Důkaz: Protože nezáleží na výběru prvku, podle kterého zvolíme izotropní grupu, vybereme si speciálně tzv. standardní úplnou vlajku: $V_i :=< \{e_1, e_2, ..., e_i\} >$ tvořenou prvky kanonické báze $e_1, e_2, ..., e_n$ v $\mathbb{R}^n$. Matice A reprezentující standardní vlajku při výběru kanonické báze má jedničky na diagonále a nad ní, pod diagonálou má nuly. Izotropní grupa je tedy tvořena všemi $X \in GL(n)$ pro které platí, že XA je podobná A. To jsou právě všechny regulární horní trojúhelníkové matice $B(n)$.

Důsledek: $\mathcal{CF}(n)$ je hladká varieta difeomorfní s kvocientem $GL(n)/B(n)$ a platí:

$$dim\mathcal{CF}(n) = dimGL(n) - dimB(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

4.3 Neúplné

Pozn: Úplná vlajková varieta je speciální případ, kdy Borelova podgrupa je přesně izotropní podgrupa. Parabolické podgrupy v $\mathcal{CF}$(n) jsou z definice tvořeny grupami odpovídajících blokově horních trojúhelníkových matic v $GL(n)$, což jsou právě parabolické podgrupy ve vlajkové varietě, viz literatura [FH] (Homogeneous Spaces).

Důsledek: Pro každou posloupnost $d_1, d_2, ..., d_k$ platí, že $\mathcal{F}_{d_1,d_2,...,d_k}(n)$ je hladká varieta difeomorfní s $GL(n)/B_{n_1,n_2,...,n_k}$, kde $B_{n_1,n_2,...,n_k}$ je grupa regulárních blokově horních trojúhelníkových $n \times n$ matic, kde n_i rozměry i-tého bloku odpovídají $d_i - d_{i-1}$.

Pozn: Vlajková varieta je také homogenní prostor ortogonální grupy. Analogicky ke Grassmanniánu najdeme izotropní podgrupu $O(n_1) \times O(n_2) \times ... \times O(n_k)$, kde n_i jsou dimenze bloků z minulého důsledku. Pak $\mathcal{F}_{d_1,d_2,...,d_k}(n)$ a $O(n)/(O(n_1) \times O(n_2) \times ... \times O(n_k))$ jsou difeomorfní hladké variety. Pro vlajkové variety v komplexních číslech opět jako u Grassmanniánu nahradíme ortogonální grupu unitární grupou, viz [FH].

Takhle může vypadat izotropní podgrupa některé vlajkové variety:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c}
n_1 & & & \\ \hline
 & n_2 & & \\ \hline
 & & \ddots & \\ \hline
 & & & n_k
\end{array}\right)$$

Literatura

[CL] L. Conlon: Differentiable Manifolds, Springer 2001

[FH] W. Fulton, J. Harris: Representation Theory A First Course, Springer 1991

[KS] L. Krump, V. Souček, J. Těšínský: Matematická analýza na Varietách, Karolinum 1997